# Một số phương pháp và kĩ thuật giải bài toán phương trình hàm*

Nguyễn Duy Thái Sơn
Đại học Sư phạm Đà Nẵng

## 1 Sử dụng nguyên lý qui nạp

Đây là một phương pháp quan trọng trong việc giải quyết các bài toán phương trình hàm trên tập số nguyên. Trước hết, ta biết rằng nguyên lý qui nạp có nhiều cách phát biểu tương đương; trong số đó, có nguyên lý sắp thứ tự tốt.

**Tính chất sắp thứ tự tốt trên tập các số tự nhiên.**

Nguyên lý sắp thứ tự tốt nói rằng mọi tập không rỗng các số tự nhiên đều có phần tử nhỏ nhất.

**Bài toán 1.** *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *sao cho*

$$mf(n) + nf(m) = (m + n)f(m^2 + n^2)$$

*với mọi* $m, n \in \mathbb{N}$*.*

*Cách giải thứ nhất.* Điều kiện cần. Giả sử $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là một nghiệm hàm của phương trình hàm đã cho. Trong phương trình

$$mf(n) + nf(m) = (m + n)f(m^2 + n^2) \tag{1}$$

chọn $m = 0$ ta thu được

$$nf(0) = nf(n^2) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra

$$f(n^2) = f(0) \tag{2}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và do đó với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Xét hàm phụ $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ định nghĩa bởi

$$g(n) = f(n) - f(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $g \equiv 0$. Chuyển phương trình hàm (1) qua $g$ ta có

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow \quad m(g(n) + f(0)) + n(g(m) + f(0)) = (m + n)(g(m^2 + n^2) + f(0)) \\ &\Leftrightarrow \quad mg(n) + ng(m) = (m + n)g(m^2 + n^2) \end{aligned} \tag{3}$$

*Đây là nội dung bài giảng được tác giả trình bày tại các khóa tập huấn giáo viên THPT chuyên khu vực phía Bắc (Hà Nội, 9/2014) và khu vực phía Nam (Vũng Tàu, 10/2014) do "Chương trình trọng điểm Quốc gia phát triển Toán học giai đoạn 2010-2020", Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán, tổ chức.

với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ và

$$(2) \Leftrightarrow g(n^2) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Với $m = n$, (3) cho ta

$$2ng(n) = 2ng(2n^2) \Leftrightarrow g(2n^2) = g(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Trong (3) lấy $m = k^2,\ n = 2k^2$ $(k \in \mathbb{N})$ và sử dụng (4), (5), ta có

$$k^2 g(k) + 2k^2 \cdot 0 = 3k^2 g(5k^4) \implies g(k) = 3g(5k^4) \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{6}$$

(chú ý rằng (4) dẫn đến $g(0) = 0$ nên (6) đúng khi $k = 0$). Từ (6) ta có thể chứng minh bằng qui nạp theo $s$ rằng

$$3^s \mid g(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

với mọi $s \in \mathbb{N}^*$. Vì thế, $g(k) = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Vậy $f$ là một hàm hằng.

Điều kiện đủ. Thử lại ta thấy rằng mọi hàm hằng $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ đều là nghiệm của phương trình hàm ban đầu.

□

*Cách khác.* Điều kiện cần. Giả sử $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là một nghiệm hàm. Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng trên $\mathbb{N}^*$ hàm $f$ có giá trị không đổi. Ta suy luận bằng phản chứng: Giả sử điều cần chứng minh là sai. Khi đó, tập

$$A = \{d \in \mathbb{N}^* \mid \exists m, n \in \mathbb{N}^*, d = f(m) - f(n)\}$$

là một tập con không rỗng của $\mathbb{N}^*$. Theo tính chất sắp thứ tự tốt trên $\mathbb{N}^*$, tồn tại giá trị nhỏ nhất $d_0 = \min A$. Vì vậy, $d_0 \in A \implies \exists m, n \in \mathbb{N}^*, d_0 = f(m) - f(n)$.

Theo (1), $f(m^2 + n^2) = \frac{m}{m+n} f(n) + \frac{n}{m+n} f(m)$ là trung bình cộng của $m + n$ số: $f(n), \ldots, f(n), f(m), \ldots, f(m)$ ($m$ số $f(n)$ và $n$ số $f(m)$). Ta suy ra

$$f(n) = \min\{f(m), f(n)\} < f(m^2 + n^2) < \max\{f(m), f(n)\} = f(m).$$

Vậy, $d_1 = f(m^2 + n^2) - f(n) \in A,\ d_1 < d_0 = \min A$, vô lý! Mâu thuẫn đó cho ta thấy $f$ không đổi trên $\mathbb{N}^*$. Mà $f(0) = f(1)$ nên $f$ hằng trên $\mathbb{N}$.

Điều kiện đủ: như đã thấy. □

**Bài toán 2.** *Cho $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ là một toàn ánh và $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ là một đơn ánh mà $f(n) \geq g(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $f(n) = g(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.*

*Giải.* Ta trình bày cách thứ nhất, sử dụng nguyên lý qui nạp. Theo giả thiết $f$ là một toàn ánh nên tồn tại dãy số nguyên dương $(n_k)_{k \geq 1}$ sao cho

$$f(n_k) = k \quad \forall k \geq 1. \tag{1}$$

Ta sẽ chứng minh bằng qui nạp theo $k \geq 1$ rằng

$$g(n_k) = k. \tag{2}$$

Thật vậy, từ giả thiết ta có

$$1 \leq g(n_1) \leq f(n_1) = 1 \quad (\text{theo} \quad (1)) \qquad \implies g(n_1) = 1.$$

Có nghĩa là (2) đúng khi $k = 1$. Giả sử (2) được chứng minh đến $k$ nào đó. Suy ra $\{g(n_1), \ldots, g(n_k)\} = \{1, \ldots, k\}$. Mà (1) cho thấy các số $n_1, n_2, \ldots$ là đôi một phân biệt, nên do tính chất đơn ánh của $g$ ta có:

$$g(n_{k+1}) \notin \{g(n_1), \ldots, g(n_k)\} = \{1, \ldots, k\}. \tag{3}$$

Hơn nữa, theo giả thiết,

$$g(n_{k+1}) \leq f(n_{k+1}) = k + 1 \quad (\text{do} \quad (1)). \tag{4}$$

Từ (3) và (4) ta có $g(n_{k+1}) = k + 1$. Vậy, theo nguyên lý qui nạp, (2) đúng với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Đặc biệt, $g$ cũng là một toàn ánh nên nó là một song ánh. Gọi $g^{-1}$ là ánh xạ ngược của $g$, dùng (2), ta viết lại (1) dưới dạng:

$$f(g^{-1}(k)) = k \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra $f \circ g^{-1}$ là ánh xạ đồng nhất trên $\mathbb{N}^*$, nghĩa là $f = g$. Đây là điều phải chứng minh. □

*Cách giải khác.* Đặt

$$A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid f(n) > g(n)\}.$$

Ta cần chứng minh rằng $A = \emptyset$. Giả sử phản chứng rằng $A \neq \emptyset$. Theo nguyên lý sắp thứ tự tốt, tồn tại $m = \min g(A)$. Ta viết $m = g(k)$ với $k \in A$ nào đó. Do $f$ là một toàn ánh nên $\exists l \in \mathbb{N}^*, m = f(l)$. Ta có

$$g(l) \leq f(l) = m = g(k) < f(k). \tag{1}$$

Nếu $g(l) = f(l)$ thì $g(l) = g(k)$, nên $l = k$ (vì $g$ đơn) và do đó $f(l) = f(k)$, vô lý! Vậy $g(l) < f(l)$; điều này, cùng với (1), cho thấy

$$g(l) \in g(A),\ g(l) < m = \min g(A),$$

lại vô lý! Mâu thuẫn cuối cùng này chứng tỏ rằng $A = \emptyset$, điều phải chứng minh. □

**Bài toán 3** (IMO 77). *Cho $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thoả*

$$f(n+1) > f(f(n)) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

*Chứng minh rằng $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.*

*Giải.* Theo tính chất sắp thứ tự tốt của $\mathbb{N}^*$, tồn tại

$$d_1 = \min A_1 \quad \text{với} \quad A_1 = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Ta thấy $d_1 \in A_1$ nên $d_1 = f(m)$ với $m \in \mathbb{N}^*$ nào đó. Ta sẽ chứng minh rằng chỉ có thể $m = 1$. Thật vậy, nếu $m \geq 2$ thì từ giả thiết ta có

$$\min A_1 = d_1 = f(m) > f(f(m-1)) \in A_1 \quad (\text{vì} \quad f(m-1) \in \mathbb{N}^*),$$

vô lý! Mâu thuẫn đó cho thấy

$$d_1 = \min\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

chỉ đạt được tại $n = 1$. Một cách tổng quát, tồn tại $d_k = \min A_k$ với

$$A_k = \{f(n) \mid \mathbb{N}^* \ni n \geq k\} \quad (\text{với mỗi} \quad k \in \mathbb{N}^*);$$

và ta sẽ chứng minh rằng (với $\mathbb{N}^* \ni n \geq k$)

$$d_k = f(n) \quad \text{chỉ tại} \quad n = k. \tag{1}$$

Theo trên, (1) đúng khi $k = 1$. Giả sử (1) đã đúng đến $k = r$ (với $r \in \mathbb{N}^*$ nào đó). Khi đó,

$$d_1 = f(1) < d_2 = f(2) < \cdots < d_r = f(r).$$

Xét $d_{r+1} = \min A_{r+1} = \min\{f(n) \mid \mathbb{N}^* \ni n \geq r+1\}$. Nếu $d_{r+1} = f(m)$ với $\mathbb{N}^* \ni m \geq r+1$ nào đó, ta sẽ chỉ ra rằng $m = r+1$. Thật vậy, nếu $m > r+1$ thì $m - 1 \geq r+1 > r$ nên dùng giả thiết qui nạp ta có $f(m-1) > d_r > \cdots > d_1$ và suy ra: $f(m-1) \geq r+1$.
Từ giả thiết của bài toán, ta cũng có

$$\min A_{r+1} = d_{r+1} = f(m) > f(f(m-1)) \in A_{r+1},$$

vô lý! Mâu thuẫn đó cho thấy

$$d_{r+1} = f(n) \quad (\mathbb{N}^* \ni n \geq r+1)$$

chỉ tại $n = r+1$; tức là, (1) đúng khi $k = r+1$, và do đó theo nguyên lý qui nạp nó đúng với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Vậy, $f$ tăng:

$$d_1 = f(1) < d_2 = f(2) < \cdots < d_k = f(k) < \cdots.$$

Đặc biệt, ta có $f(n) \geq n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Hơn nữa, nếu $f(n) \geq n+1$ tại $n \in \mathbb{N}^*$ nào đó thì (cũng do $f$ tăng) $f(f(n)) \geq f(n+1)$, mâu thuẫn với giả thiết của bài toán. Vậy,

$$f(n) = n$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

□

**Bài toán 4** (Bungari 2010). *Cho* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *thoả*

$$f(1) = 1, f(n) = n - f(f(n-1)) \quad \forall n \geq 2.$$

*Chứng minh rằng* $f(n + f(n)) = n \quad \forall n \geq 1$.

*Giải.* Trước hết, ta chứng minh một sự kiện quan trọng:

$$f(n) \leq f(n+1) \leq 1 + f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Nói cách khác, $f$ là một hàm đơn điệu không giảm và mỗi khi tăng nó tăng chỉ 1 đơn vị.

Thật vậy, đặt $s_n = f(n+1) - f(n)$, ta viết lại (1) dưới dạng tương đương:

$$s_n \in \{0, 1\} \quad \text{với mọi} \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Dễ thấy (2) đúng khi $n = 1$. Giả sử (2) đã đúng với mọi $n \leq k$ ($k \in \mathbb{N}^*$ nào đó). Dùng công thức truy hồi của hàm $f$, ta tính được

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= f(k+2) - f(k+1) = (k+2 - f(f(k+1))) - (k+1 - f(f(k))) \\ &= 1 - (f(f(k+1)) - f(f(k))). \end{aligned} \tag{3}$$

Theo giả thiết qui nạp, chỉ có 2 khả năng:

- $s_k = 0$, tức là $f(k+1) = f(k)$ và do đó (3) cho ta $s_{k+1} = 1$,
- $s_k = 1$, tức là $f(k+1) = 1 + f(k)$. Khi đó,

$$(3) \implies s_{k+1} = 1 - s_{f(k)}. \tag{4}$$

  Từ giả thiết qui nạp ta cũng thấy $f$ đơn điệu không giảm trên $[1, k]$; mỗi lần tăng (trên đoạn này), $f$ tăng chỉ 1 đơn vị; nên $f(k) \leq k$ (chú ý rằng $f(1) = 1$). Suy ra $s_{f(k)} \in \{0, 1\}$ và điều này, kết hợp với (4), dẫn đến: $s_{k+1} \in \{0, 1\}$.

Từ đây, nguyên lý qui nạp cho ta tính chất (2). Vậy, (1) đã được chứng minh.

Quay trở lại bài toán, ta tiếp tục chứng minh đẳng thức

$$f(n + f(n)) = n \tag{5}$$

bằng qui nạp theo $n$. Dễ thấy (5) đúng khi $n = 1$. Giả sử (5) đúng đến $n \in \mathbb{N}^*$ nào đó. Suy ra

$$f(n) = f(f(n + f(n))) = n + f(n) + 1 - f(n + f(n) + 1)$$

$$\implies f(n + 1 + f(n)) = n + 1. \tag{6}$$

Theo (1) thì chỉ có 2 khả năng:

1. $f(n+1) = f(n)$. Khi đó (6) được viết lại thành

$$f(n + 1 + f(n+1)) = n + 1.$$

   Suy ra (5) đúng khi thay $n$ bởi $n + 1$.

2. $f(n+1) = 1 + f(n)$. Trong trường hợp này, dùng công thức truy hồi của $f$ ta có

$$\begin{aligned} f(n+1+f(n+1)) &= n+1+f(n+1) - f(f(n+f(n+1))) \\ &= n+1+f(n+1) - f(f(n+1+f(n))) \\ &= n+1+f(n+1) - f(n+1) \quad (\text{do } (6)) \\ &= n+1, \end{aligned}$$

nên (5) cũng đúng khi thay $n$ bởi $n + 1$.

□

Dùng (1) ta có thể đưa ra một lời giải khác, đặc sắc hơn, cho Bài toán 4.

*Cách giải khác.* Từ giả thiết ta thấy $f$ không bị chặn trên; và theo (1), xuất phát từ $f(1) = 1$, hàm $f$ đơn điệu không giảm, mỗi lần tăng thì tăng chỉ 1 đơn vị. Suy ra $f$ là một toàn ánh. Vậy, với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ cố định, tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ để $f(m) = n$. Tập các giá trị $m$ thoả mãn điều kiện này là hữu hạn (chú ý rằng $f$ đơn điệu không giảm và không bị chặn trên) nên ta có thể xem rằng $m$ đã được chọn lớn nhất. Khi đó, $f(m+1) = n + 1$ và

$$\begin{aligned} n + f(n) &= n + f(f(m)) \\ &= n + m + 1 - f(m+1) \\ &= n + m + 1 - (n+1) \\ &= m \\ \implies f(n + f(n)) &= f(m) = n. \end{aligned}$$

□

## 2 Sử dụng tính chất đơn ánh, toàn ánh và thủ thuật biến đổi đại số để giải các phương trình hàm trên $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$

**Bài toán 5.** *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả:*

$$f(x + y + f(y)) = f(f(x)) + 2y$$

*với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.*

*Giải.* Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một nghiệm hàm. Ta sẽ chứng minh rằng $f$ là một đơn ánh. Thật vậy, giả sử $f(a) = f(b) =: c$. Khi đó, dùng phương trình hàm, ta có

$$\begin{cases} f(a+b+c) = f(a+b+f(b)) = f(f(a))+2b = f(c)+2b \\ f(a+b+c) = f(b+a+f(a)) = f(f(b))+2a = f(c)+2a \end{cases} \Longrightarrow a = b.$$

Vậy $f$ là một đơn ánh.

Trong phương trình hàm đã cho, chọn $y = 0$, và sử dụng tính đơn ánh của $f$ ta có

$$f(x + f(0)) = f(f(x)) \Longrightarrow f(x) = x + f(0) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại, ta thấy mọi hàm $f$ được cho bởi

$$f(x) = x + C$$

(trong đó $C$ là hằng số) là một nghiệm hàm. □

**Nhận xét 1.** *Việc sử dụng/chứng minh tính đơn ánh thường tỏ ra hữu ích khi xét các phương trình hàm chứa những biểu thức có dạng $f(f(\ldots))$ và những biểu thức đối xứng của cặp biến tự do $(x, y)$; một trong hai biến tự do $x, y$ nằm bên ngoài các biểu thức của $f$ (dưới dạng thích hợp).*

**Bài toán 6** (Italian TST 2007)**.** *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả:*

$$f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x)$$

*với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.*

*Cách giải thứ nhất.* Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một nghiệm hàm.

Ta sẽ chứng minh khẳng định sau.

**Khẳng định.** Nếu $f(a) = f(b) = c \neq 0$ thì $a = b$.

Thật vậy, với $a, b, c$ như thế, ta có

$$\begin{cases} f(ab+c) = f(ab+f(a)) = af(b)+f(a) = ac+c \\ f(ab+c) = f(ba+f(b)) = bf(a)+f(b) = bc+c \end{cases}$$

$$\Longrightarrow ac = bc \Longrightarrow a = b \quad (\text{vì } c \neq 0).$$

Trở lại bài toán. Trong phương trình hàm đã cho, chọn $x = 0$ ta có

$$f(f(0)) = f(0). \tag{1}$$

Dùng (1) và Khẳng định, ta chứng minh được

$$f(0) = 0. \tag{2}$$

Thật vậy, nếu $f(0) \neq 0$ thì với $a := f(0)$, $b := 0$, $c := f(a) = f(b)$ (do (1)), ta thấy $c \neq 0$ nên Khẳng định cho ta $a = b$, tức là $f(0) = 0$, vô lý! Mâu thuẫn đó chỉ ra rằng (2) đúng.
Trong phương trình hàm đã cho, chọn $y = 0$ và dùng (2) ta được

$$f(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Lại dùng Khẳng định, từ (3), ta thấy

$$f(x) \in \{0, x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Hãy để ý rằng: hàm hằng với giá trị 0 ($f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$) và hàm đồng nhất ($f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$) là hai nghiệm hàm của phương trình hàm đã cho.

Ta sẽ chứng minh rằng không còn nghiệm hàm nào khác. Thật vậy, giả sử

$$\exists x_0, f(x_0) \neq 0, \tag{5}$$
$$\exists y_0, f(y_0) \neq y_0. \tag{6}$$

Do (2) nên (5)-(6) cho thấy $x_0 y_0 \neq 0$. Hơn nữa theo (4) thì $f(x_0) = x_0$ và $f(y_0) = 0$. Vì thế, thay $x = x_0,\ y = y_0$ vào phương trình hàm đã cho, ta được

$$f(x_0 y_0 + x_0) = f(x_0) = x_0 \neq 0.$$

Suy ra $x_0 y_0 + x_0 = x_0$ (theo Khẳng định), nên $x_0 y_0 = 0$, vô lý! Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng phương trình hàm chỉ có 2 nghiệm hàm đã nói ở trên. □

*Cách giải khác.* Như ở cách thứ nhất, ta chứng minh được:

$$f(0) = 0, \tag{1}$$
$$f(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong phương trình hàm đã cho, chọn $y := -1$ và thay $x$ bởi $f(x)$ rồi sử dụng (2) ta có

$$f(0) = f(f(x) \cdot (-1) + f(x)) = f(x)f(-1) + f(x).$$

Vậy, theo (1), ta có

$$f(x)((f(-1) + 1) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Giả sử $f$ là một nghiệm hàm mà tồn tại $x_0$ với $f(x_0) \neq 0$. Từ (3), với $x = x_0$, ta suy ra

$$f(-1) = -1. \tag{4}$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$f(t) = t \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Giả sử phản chứng rằng (5) sai, tức là

$$\exists y_0, f(y_0) \neq y_0. \tag{6}$$

Khi đó ta có

**Khẳng định.** Hàm $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi $g(r) = f(r) - r$ ($\forall r \in \mathbb{R}$) là một toàn ánh.

Ta chứng minh Khẳng định. Với $r := xy_0 + f(x)$ thì từ phương trình hàm đã cho (với $y := y_0$) ta thấy

$$\begin{aligned} g(r) &= f(r) - r \\ &= xf(y_0) + f(x) - (xy_0 + f(x)) \\ &= x(f(y_0) - y_0) \end{aligned}$$

vét hết tập $\mathbb{R}$ khi $x$ chạy khắp $\mathbb{R}$ (chú ý (6)). Như vậy khẳng định được chứng minh.

Trở lại bài toán. Trong phương trình hàm đã cho, chọn $y := -1$ và sử dụng (4) ta có

$$f(f(x) - x) = f(x) - x \implies f(t) = t$$

trong đó, theo Khẳng định, $t := f(x) - x = g(x)$ vét hết tập $\mathbb{R}$ khi $x$ chạy khắp $\mathbb{R}$. Nhưng điều này mâu thuẫn với (6). Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng (5) là đúng. Chỉ còn phải thử lại để thu được hai nghiệm hàm $f(x) \equiv 0, f(x) \equiv x$.

□

**Bài toán 7** (Balkan MO 2007). *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho*

$$f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4f(x)y$$

*với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.*

*Giải.* Cho $f$ là một nghiệm hàm. Trong phương trình hàm đã cho, chọn $y = f(x)$ ta có

$$f(2f(x)) = f(0) + 4f(x)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Mặt khác, trong phương trình hàm đã cho, thay $y$ bởi $2f(y) - f(x)$, ta được

$$f(2f(y)) = f(2(f(x) - f(y))) + 4f(x)(2f(y) - f(x))$$

và sử dụng (1) ta có

$$f(0) + 4f(y)^2 = f(2(f(x) - f(y))) + 4f(x)(2f(y) - f(x))$$

$$\implies f(2(f(x) - f(y))) = f(0) + (2(f(x) - f(y)))^2. \tag{2}$$

**Khẳng định.** Nếu tồn tại $x_0$ sao cho $f(x_0) \neq 0$ thì $\{f(a) - f(b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Chứng minh Khẳng định. Đặt $a = f(x_0) + y,\ b = f(x_0) - y$, từ phương trình hàm đã cho (với $x := x_0$), ta thấy $f(a) - f(b) = 4f(x_0)y$ vét hết tập $\mathbb{R}$ khi $y$ chạy khắp $\mathbb{R}$ (vì $f(x_0) \neq 0$). Như vậy, Khẳng định được chứng minh.

Trở lại bài toán, giả sử tồn tại $x_0$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Khi đó, theo Khẳng định, $t := 2(f(x) - f(y))$ chạy khắp $\mathbb{R}$, nên (2) cho ta

$$f(t) = f(0) + t^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy ngoài nghiệm hàm hằng với giá trị 0 còn có các nghiệm hàm dưới dạng

$$f(x) = x^2 + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

trong đó $c$ là một hằng số tuỳ ý. □

Sau đây là một số bài toán đề nghị về cùng chủ đề.

**Bài toán 8** (IMO 2000, Shortlist)**.** *Tìm tất cả các cặp hàm* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sao cho*

$$f(x+g(y)) = xf(y) - yf(x) + g(x)$$

*với mọi* $x, y \in \mathbb{R}$.

**Bài toán 9.** *Tìm tất cả các cặp hàm* $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sao cho*

$$f(x+g(y)) + g(x) = xf(y) + yf(x)$$

*với mọi* $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta kết thúc bài giảng với một phương trình hàm trên tập các số hữu tỉ dương:

**Bài toán 10** (IMO 2013, Prob. 5)**.** *Cho* $f:\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{R}$ *thoả mãn đồng thời ba điều kiện*

**(i)** $f(xy) \le f(x)f(y)$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$*;*

**(ii)** $f(x+y) \ge f(x) + f(y)$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$*;*

**(iii)** $\exists a \in \mathbb{Q},\ a > 1,\ f(a) = a$.

*Chứng minh rằng* $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

*Giải.* Trong (i) chọn $x := 1, y := a$ và sử dụng (iii), ta có

$$a \le af(1) \implies f(1) \ge 1.$$

Vì thế

$$f(n) = f(1+\cdots+1) \ge f(1)+\cdots+f(1) = nf(1) \ge n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Một hệ quả của (1) là: $f(n) > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Từ đó,

$$0 < f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) \le f(q)f\left(\frac{p}{q}\right)$$

với mọi $p, q \in \mathbb{N}^*$; suy ra $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{Q}_{>0}$. Kết hợp điều này với (ii) ta thấy $f$ tăng ngặt trên $\mathbb{Q}_{>0}$.

**Khẳng định.** $f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta đưa ra hai cách chứng minh cho Khẳng định.

**Cách 1** (phương pháp đại số). Giả sử kết luận của Khẳng định là sai. Khi đó theo (1), tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ để $f(m) > m$. Ta viết

$$f(m) - m = \frac{M}{N}$$

với $N \in \mathbb{N}^*,\ M \in \mathbb{R}$, và ta có thể chọn chúng sao cho $M \ge m$. Sử dụng (ii) ta có

$$\begin{aligned} f(nm) &= f(m+\cdots+m) \ge f(m)+\cdots+f(m) = nf(m) \\ &\ge n(m + f(m) - m) = nm + n\frac{M}{N} \\ &\ge nm + M \ge (n+1)m \quad \forall n \ge N. \end{aligned} \tag{2}$$

Đặt $k = \lceil \log_a(Nm) \rceil$, nói cách khác, $k$ là số nguyên bé nhất không bé hơn $\log_a(Nm)$. Ta có ($k \in \mathbb{N}$):

$$k \geq \log_a(Nm) \implies a^k \geq Nm. \tag{3}$$

Gọi $n$ là số nguyên dương lớn nhất để $a^k \geq nm$ (theo (3) số $n$ tồn tại, hơn nữa $n \geq N$). Khi đó

$$nm \leq a^k < (n+1)m. \tag{4}$$

Từ (2), (4) và tính đơn điệu của $f$ ta được

$$f(a^k) \geq f(nm) \geq (n+1)m. \tag{5}$$

Cũng do (4) mà (i) và (iii) kéo theo

$$f(a^k) = f(a \cdot a \cdots a) \leq f(a) \cdot f(a) \cdots f(a) = a^k < (n+1)m. \tag{6}$$

Ta thấy rằng (5), (6) mâu thuẫn nhau. Mâu thuẫn đó chỉ ra rằng kết luận của Khẳng định là đúng.

**Cách 2** (tiếp cận giải tích). Cố định một $m \in \mathbb{N}^*$ tuỳ ý và xét dãy $(n_k)$ được cho bởi

$$n_k := \lfloor \frac{a^k}{m} \rfloor \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Dễ thấy $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$ (vì $a > 1$). Ta có

$$n_k \leq \frac{a^k}{m} < n_k + 1 \implies n_k m \leq a^k < (n_k+1)m.$$

Vì $f$ tăng nên (ii) kéo theo

$$f(a^k) \geq f(n_k m) \geq n_k f(m). \tag{7}$$

Mặt khác, từ (i) và (iii), ta cũng có

$$f(a^k) \leq f(a)^k = a^k < (n_k+1)m. \tag{8}$$

Kết hợp (7) với (8), ta đi đến

$$\frac{n_k+1}{n_k} > \frac{f(m)}{m} \geq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Cho $k \to \infty$ và sử dụng định lý về giới hạn kẹp, ta kết luận $\frac{f(m)}{m} = 1$, tức là $f(m) = m$. Khẳng định đã được chứng minh.

Quay trở lại bài toán. Với mọi $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ ta viết $x = \frac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}^*$. Dùng (i) và Khẳng định ta suy ra

$$p = f(p) = f(qx) \leq f(q)f(x) = qf(x)$$

$$\implies f(x) \geq \frac{p}{q} = x. \tag{9}$$

Mặt khác, từ (ii) ta lại có

$$p = f(p) = f(x + x + \cdots + x) \geq f(x) + f(x) + \cdots + f(x) = qf(x)$$

$$\Longrightarrow f(x) \leq x. \tag{10}$$

Các bất đẳng thức (9) và (10) cho ta điều phải chứng minh.

$\square$